

学校教育学専攻 理数・技術系 数学教育問題群

## 選択科目 共通問題

問題 1 以下の問いに答えよ。(40 点)

著作権保護の観点から、公表していません

**出典: Goldin, G. A. (2002).** Representation in mathematical learning and problem solving. In L. D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (p.213). Lawrence Erlbaum Associates.

問 1 上記英文の下線部①を日本語に翻訳せよ。

問 2 上記英文の下線部②の内容を、小学校算数科、中学校数学科あるいは高等学校数学科のいずれかにおける具体例を用いて説明せよ。

### 【出題意図】

英語の基本的能力をみることを意図する。

英語の読解力とともに、数学教育学研究に必要な基礎的資質をみることを意図する。

学校教育学専攻 理数・技術系 数学教育問題群

【解答例】

解答例は公表しない

学校教育学専攻 理数・技術系 数学教育問題群

## 選択科目 共通問題

問題 2 以下の問いに答えよ。(30 点)

問 1 実数を成分とする  $n$  次正方行列  $A$  について、 ${}^tAA = O$  ならば  $A = O$  であることを示せ。ここで、 ${}^tA$  は  $A$  の転置行列、 $O$  は零行列を表す。

問 2 次の行列  $A$  の行列式を求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

### 【出題意図】

今日の数学の基盤の 1 つである線形代数学に関して、その基礎知識である行列の基本的な計算・操作の理解度を評価するために出題した。

### 【解答例】

問 1  $A = (a_{ij})$  と表すと、 ${}^tAA = O$  より、任意の  $1 \leq i \leq n$  について  $\sum_{k=1}^n a_{ik}^2 = 0$  が成り立つ。 $a_{ik}$  は全て実数であるので、各  $1 \leq k \leq n$  について  $a_{ik} = 0$ 、すなわち  $A = O$  が成り立つ。

問 2  $|A| = -16$

学校教育学専攻 理数・技術系 数学教育問題群

## 選択科目 共通問題

問題 3 以下の問いに答えよ。(30 点)

問 1 函数  $f(x) = x^{\frac{1}{1-x}}$  ( $0 < x < 1$ ) の導函数  $f'(x)$  を求めよ。

問 2  $a$  を実数の定数とし、先の問題 1 における函数  $f(x)$  を用いて、函数  $g(x)$  ( $x > 0$ ) を以下で定義する。

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (0 < x < 1) \\ a & (x \geq 1) \end{cases}$$

函数  $g(x)$  が  $x = 1$  で連続となるような  $a$  の値を求めよ。

問 3 函数  $h(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x te^{t^2-x^2} dt$  ( $x > 0$ ) の第 2 次導函数  $h''(x)$  を求めよ。

### 【出題意図】

出題の主な目的は、微積分学の基礎理解度を確認することである。「函数の極限・連続性」および「微分法・積分法」に関する定義・定理や基本的な計算規則を正しく理解しているか、またその理解に基づき論理的に説明できるか、公式や手順を適切に用いて正確に計算できるかを評価する。

### 【解答例】

解答例は公表しない

学校教育学専攻 理数・技術系 数学教育問題群

## 選択科目 専門領域問題 1 (数学教育学)

問題 1 平成 29 年告示中学校学習指導要領数学科の目標には、「数量や図形などについての基礎的概念や原理・法則などを理解するとともに、事象を数学化したり、数学的に解釈したり、数学的に表現・処理したりする技能を身に付けるようにする。」と書かれている。下線部について、数学の具体例を用いて説明せよ。

(50 点)

### 【出題意図】

数学教育学研究に必要な資質・能力をみることを意図する。

### 【解答例】

下線部は日常生活や社会の事象を、理想化したり単純化したり、条件を数学的に表現したりすることにより数学化し、数学の問題として解決し、得られた数学的な結果について実際の問題の答えとして受け入れるかどうかを判断するために、具体的な事象に即して解釈することを意味している。例えば、桜の開花日は3月の平均気温と関係がありそうだと予想し、数年間のデータを集めて、そこから桜の開花日と3月の平均気温には一次関数の関係があるとして数学化し、立式する。3月の平均気温が $10^{\circ}\text{C}$ であった場合、開花日を、関数式を使って求め、その答えの意味する範囲を解釈し、現実的に妥当かどうかを判断する。この場合、関数式を求めて、数値を代入することで数学的に表現・処理している。

学校教育学専攻 理数・技術系 数学教育問題群

## 選択科目 専門領域問題 1 (数学教育学)

問題 2 批判的思考力の育成は数学教育の重要なねらいの一つになっている。小学校算数科，中学校数学科あるいは高等学校数学科のいずれかにおける具体例を基に，批判的思考力を育成する指導例及びその指導上の留意点を論述せよ。(50 点)

### 【出題意図】

数学教育学研究に必要な資質・能力をみることを意図する。

### 【解答例】

批判的思考力は証拠に基づく論理的で偏りのない思考，内省的思考(リフレクション)及び問題解決や判断を支える汎用的スキルと捉えられる。例えば，中学生の睡眠時間に関するデータの分布や母集団の傾向に着目して，その傾向を読み取り批判的に考察し判断するという統計の指導が考えられる。その留意点としては以下のことが挙げられる。統計的手法を活用して問題解決することができるようになるために，中学生の睡眠時間が少ないという問題を取り上げる。それを解決するために，校内で質問紙調査を実施してデータを収集し，コンピュータなどを利用して処理し，データの傾向を捉え説明するという一連の活動を生徒が経験できるようにする。また，考察の結果としてただ一つの正しい結論が導かれるとは限らないことを知ることである。以上のような経験を通して，自他の問題解決の過程を振り返ったり，社会における標本調査の方法などを多面的に吟味したりすることにより，批判的に考察できるようにする。

学校教育学専攻 理数・技術系 数学教育問題群

## 選択科目 専門領域問題 2 (代数学)

問題 1  $R$  は可換環で,  $I$  は  $R$  のイデアルとする。以下の問いに答えよ。(50 点)

問 1  $R$  が Noether 環であるとき,  $R/I$  も Noether 環であることを示せ。

問 2  $\sqrt{I} = \{a \in I \mid \text{ある整数 } n > 0 \text{ に対して } a^n \in I \text{ が成り立つ}\}$  とおくと,  $\sqrt{I}$  は  $R$  のイデアルであることを示せ。

### 【出題意図】

今日の代数学分野を学習・研究するために必要とされる基礎的な環論の知識・技能を評価するために出題した。

### 【解答例】

解答例は公表しない

学校教育学専攻 理数・技術系 数学教育問題群

## 選択科目 専門領域問題 2 (代数学)

問題 2 整数環  $\mathbb{Z}$  に関して、以下の問いに答えよ。(50 点)

問 1 任意の  $\mathbb{Z}$  のイデアル  $I$  に対して、 $a \in \mathbb{Z}$  が存在して  $I = (a)$  と書けることを示せ。

ここで、 $(a)$  は  $a$  で生成される  $\mathbb{Z}$  の単項イデアルを表す。必要であれば、下記主張を証明なしに用いても良い。

「 $m, n \in \mathbb{Z}$  で  $n > 0$  とする。このとき、 $m = nq + r$  かつ  $0 \leq r < n$  を満たす整数の組  $(q, r)$  がただ一つ存在する。」

問 2  $p \in \mathbb{Z}$  で  $p \neq 0$  かつ  $p \neq \pm 1$  とする。次の 2 条件が同値であることを示せ。

(i)  $(p)$  は  $\mathbb{Z}$  の素イデアルである。

(ii)  $a, b \in \mathbb{Z}$  について、 $p = ab$  ならば  $a = \pm 1$  または  $b = \pm 1$  である。

### 【出題意図】

今日の代数学分野を学習・研究するために必要とされる基礎的な整数環に関する知識を評価するために出題した。

### 【解答例】

解答例は公表しない

学校教育学専攻 理数・技術系 数学教育問題群

## 選択科目 専門領域問題 3 (幾何学)

問題 1 パラメータ表示された  $\mathbb{R}^3$  内の空間曲線  $\gamma(s)$  に関する以下の問いに答えよ。

(50 点)

問 1 曲線  $\gamma(s) = (\cos s, \sin s, 0), s \in [0, 2\pi)$  は弧長パラメータ表示された曲線であることを示せ。

問 2 問 1 の空間曲線の曲率および捩率を求めよ。

### 【出題意図】

空間内の曲線における弧長パラメータ表示の証明および曲率, 捩率の計算を問うことで, 空間内の曲線に関する知識および理解度を問う。

### 【解答例】

解答例は公表しない

学校教育学専攻 理数・技術系 数学教育問題群

## 選択科目 専門領域問題 3 (幾何学)

問題 2  $I \subset \mathbb{R}$  をある区間とする。 $\mathbb{R}^3$  内の円柱

$$p(u, v) = (\cos u, \sin u, v), (0 \leq u < 2\pi, v \in \mathbb{R})$$

と円柱  $p(u, v)$  上の弧長パラメータ表示された曲線  $\gamma(s), (s \in I)$  に対して、以下の問いに答えよ。(50 点)

問 1 曲面  $p(u, v)$  上の曲線  $\gamma(s), (s \in I)$  が測地線であることの定義を述べよ。

問 2 円柱の単位法線ベクトル  $\nu$  を求めよ。

問 3 円柱上の弧長パラメータ表示された曲線を

$$\gamma(s) = p(u(s), v(s))$$

と表す。曲線  $\gamma(s)$  が測地線であるための必要十分条件は  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  に対して、

$$u(s) = as + b, v(s) = cs + d$$

であることを示せ。

### 【出題意図】

曲面上の測地線の定義および測地線であるための必要十分条件を問うことで、曲面上の測地線に関する知識および理解度を問う。

### 【解答例】

解答例は公表しない

学校教育学専攻 理数・技術系 数学教育問題群

## 選択科目 専門領域問題 4 (解析学)

問題 1 以下の問いに答えよ。(50 点)

問 1 2 変数関数  $P(x, y)$  ( $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ) を次で定義する。

$$P(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + xy + \frac{3}{4}y^2 - \frac{y}{2} + \frac{1}{4}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$P(x, y)$  が最小値を持つときの  $(x, y)$  の座標をすべて求めよ。

問 2  $A, B, C, D$  を実数の定数とし, 2 変数関数  $z = Q(x, y)$  ( $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ) を次で定義する。

$$z = Q(x, y) = Ax^3y^3 + Bx^2 + Cxy + Dx, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

以下の条件 (i)(ii) を満たす 2 変数関数  $F(x, y)$  が存在するような  $A, B, C, D$  の値を求めよ。

(i)  $\frac{\partial}{\partial x} F(x, y) = P(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$

(ii)  $\frac{\partial}{\partial y} F(x, y) = Q(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$

問 3 先の問 2 における条件 (i)(ii) を満たす 2 変数関数  $F(x, y)$  で, 条件  $F(2, -1) = 2$  を満たすものを求めよ。

### 【出題意図】

出題の主な目的は, 多変数関数の微積分学の基礎理解度を確認することである。2 変数関数の「偏微分・全微分」「極値問題」および「ベクトル解析」に関する定義・定理や基本的な計算規則を正しく理解しているか, またその理解に基づき論理的に説明できるか, 公式や手順を適切に用いて正確に計算できるかを評価する。

### 【解答例】

解答例は公表しない

学校教育学専攻 理数・技術系 数学教育問題群

## 選択科目 専門領域問題 4 (解析学)

問題 2 以下の問いに答えよ。(50 点)

問 1 常微分方程式  $\frac{dy}{dx} = y(1-y)$  の解  $y = y(x)$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) において、次の (\*) が成り立つことを示せ。

(\*)  $0 < a < 1$  かつ  $y(0) = a$  ならば、すべての  $x \in \mathbb{R}$  に対して  $y(x) > y(x)^2$  となる

問 2 次の常微分方程式の初期値問題を解け。

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 3y = 10e^{-x} \\ y(0) = 1, y'(0) = -3 \end{cases}$$

問 3 常微分方程式  $\frac{d^6y}{dx^6} + 3\frac{d^4y}{dx^4} + 3\frac{d^2y}{dx^2} + y = x^3 + x$  の一般解を求めよ。

### 【出題意図】

出題の主な目的は、常微分方程式論の基礎理解度を確認することである。「1 階の常微分方程式」「高階の線形微分方程式」に関する基本的な概念や求積法を正しく理解しているか、またその理解に基づき論理的に説明できるか、公式や手順を適切に用いて正確に計算できるかを評価する。

### 【解答例】

解答例は公表しない